

Model tendencji rozwojowej

Gdy X jest zmienną czasową $x_i = t$ ($t = 1, 2, \dots, n$) tzn. model regresji ma postać

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 t$$

wówczas taki model nazywamy modelem tendencji rozwojowej lub modelem trendu liniowego

Wtedy korzystając z własności:

$$(*) \quad \sum_{t=1}^n t = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{t=1}^n t^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$
$$\bar{t} = \frac{n+1}{2} \quad \sum (t - \bar{t})^2 = \sum t^2 - n(\bar{t})^2$$

mamy

$$b_1 = \frac{n \sum t y_t - \sum t \sum y_t}{n \sum t^2 - (\sum t)^2} = \frac{12 \sum (t - \bar{t}) y_t}{n(n^2 - 1)}$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{t} = \bar{y} - b_1 \frac{n+1}{2}$$

Wariancja resztowa

Niech $e_i = y_i - \hat{y}_i$, (gdzie $\hat{y}_i = b_0 + b_1 t$) to reszty modelu, wtedy

$$s_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n-2} \quad \text{czyli} \quad s_e^2 = \frac{\sum_{t=1}^n y_t^2 - b_0 \sum_{t=1}^n y_t - b_1 \sum_{t=1}^n t y_t}{n-2}$$

$s_e = \sqrt{s_e^2}$ oznacza średnie (standardowe) odchylenie od trendu liniowego.

Dopasowanie modelu do danych empirycznych oceniamy też współczynnikiem determinacji

$$R^2 = \frac{\sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} =$$
$$= \frac{b_0 \sum y_i + b_1 \sum t y_t - n \bar{y}^2}{\sum y_t^2 - n(\bar{y})^2} = \frac{b_1 (\sum t y_t - n \bar{t} \bar{y})}{\sum y_t^2 - n(\bar{y})^2} = r^2$$

Prognoza

Prognoza punktowa.

Niech t_τ – okres prognozy.

Prognoza punktowa y_τ^* to przewidywana wartość cechy Y w okresie t_τ .

$$y_\tau^* = b_0 + b_1 t_\tau$$

Standardowy błąd prognozy punktowej

$$s_\tau = s_e \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(t_\tau - \bar{t})^2}{\sum_{t=1}^n (t - \bar{t})^2}} = s_e \sqrt{1 + \frac{\sum_{t=1}^n t^2 + n t_\tau^2 - 2 t_\tau \sum_{t=1}^n t}{n \sum_{t=1}^n t^2 - \left(\sum_{t=1}^n t\right)^2}}$$

Wzór ten można uprościć korzystając z własności (*).

$$\begin{aligned} s_\tau &= s_e \sqrt{1 + \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n t_\tau^2 - 2 t_\tau \frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n^2(n+1)^2}{4}}} = \\ &= s_e \sqrt{1 + \frac{2(2n+1) + \frac{12 t_\tau^2}{n+1} - 12 t_\tau}{n^2 - n}} \end{aligned}$$

Zatem należy traktować wartość prognozy jako $y_\tau^* \pm s_\tau$

Jakość prognozy punktowej możemy ocenić względnym błędem prognozy punktowej

$$\delta_{punkt} = \frac{s_\tau}{y_\tau^*} \cdot 100\%$$

Prognoza przedziałowa dla poziomu ufności $1 - \alpha$.

$$\left\langle y_\tau^* - u_\alpha S_\tau; y_\tau^* + u_\alpha S_\tau \right\rangle$$

gdzie u_α odczytujemy z tablicy rozkładu Studenta:

$$P(|T_{n-2}| > u_\alpha) = \alpha$$

Jakość prognozy przedziałowej możemy ocenić względnym błędem prognozy przedziałowej

$$\delta_{prz} = \frac{u_\alpha s_\tau}{y_\tau^*} \cdot 100\%$$