

Szereg czasowy z trendem.

Model Holta.

Stosujemy dwa równania rekurencyjne:

I - służy do wyznaczania wygładzonych wartości szeregu czasowego w chwili t

$$F_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)(F_{t-1} + S_{t-1})$$

II - służy do wyznaczania wygładzonych wartości przyrostu trendu w chwili t

$$S_t = \beta(F_t - F_{t-1}) + (1 - \beta)S_{t-1}$$

$\alpha, \beta \in \langle 0, 1 \rangle$ - parametry wygładzania.

Ich wartość dobieramy np. na podstawie kryterium najmniejszego błędu średniego prognoz wygaśniętych s^* tzn. $\min_{\alpha, \beta} s^*(\alpha, \beta)$ gdzie

$$s^* = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - y_t^*(\alpha, \beta))^2}$$

Prognozy wygaśnięte obliczamy wg wzoru

$$y_{t+1}^* = F_t + S_t$$

Prognozę zmiennej Y na okres T ($T > n$) $T = n + 1, n + 2$ itd.

$$y_T^* = F_n + (T - n)S_n$$

w szczególności dla $T = n + 1$ mamy:

$$y_{n+1}^* = F_n + S_n$$

(wszystkie kolejne prognozy leżą na prostej $y = F_n + x \cdot S_n$)

Uwaga.

Ponieważ $y_t^* = F_{t-1} + S_{t-1}$ to

$$F_t = y_t^* + \alpha(y_t - y_t^*) \quad S_t = S_{t-1} + \alpha\beta(y_t - y_t^*)$$

Wartości początkowe F_1 i S_1 wyznaczamy wg propozycji

Propozycja	F_1	S_1
1	y_1	0
2	y_1	$y_2 - y_1$
3	Wyraz wolny liniowej funkcji trendu oszacowany na podstawie np. kilku pierwszych obserwacji	Współczynnik kierunkowy liniowej funkcji trendu oszacowany na podstawie np. kilku pierwszych obserwacji

Przykład:

Wartość usług firmy „X” w kolejnych kwartałach 2001 ÷ 2003 i trzech pierwszych kwartałach 2004:

37, 41, 40, 41, 45, 42, 46, 48, 47, 53, 58, 67, 79, 85, 88 (tys. zł)

a) wyznaczyć prognozy na IV kwartał 2004

b) ocenić jakość prognozy.

Przyjmujemy $F_1 = y_1 = 37$

Przyjmujemy $S_1 = y_2 - y_1 = 41 - 37 = 4$

Model Holta zastosujemy dla $\alpha = 0,95$ i $\beta = 0,45$

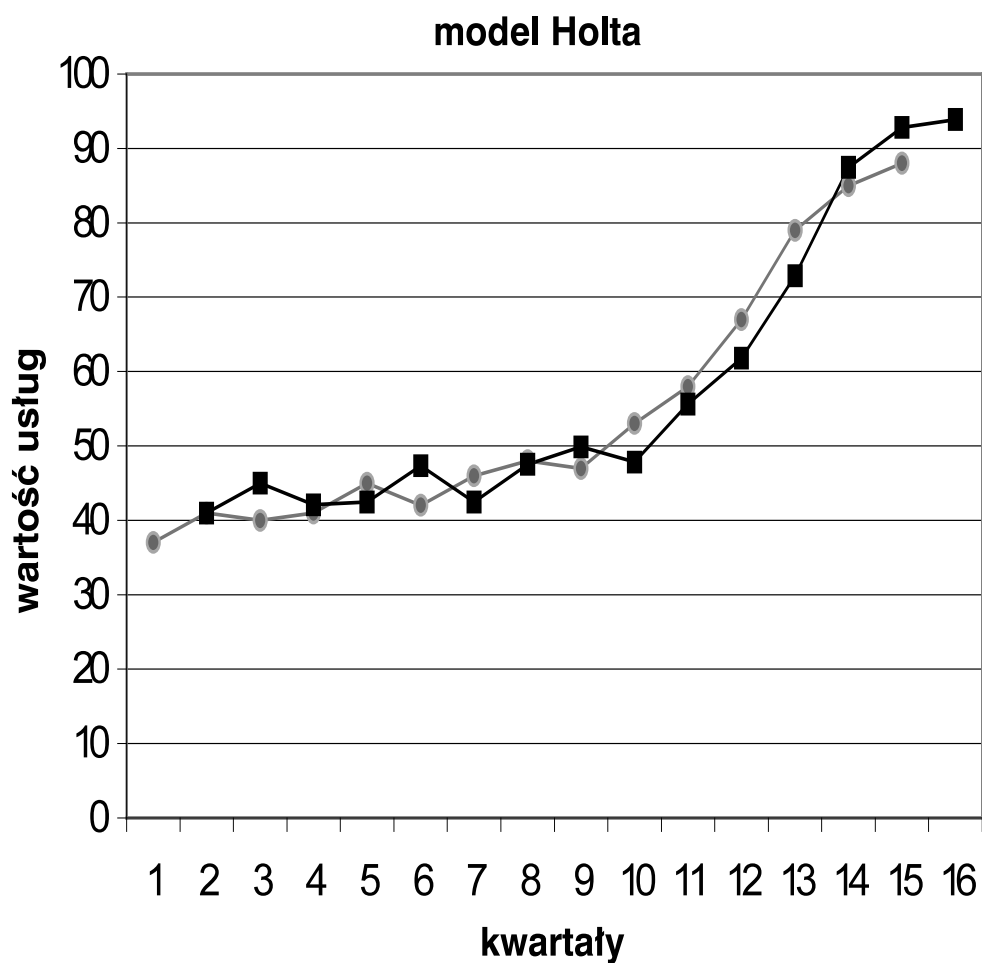
kwartał	y_t	F_t	S_t	$y_t^* = F_{t-1} + S_{t-1}$	$(y_t - y_t^*)^2$	$\frac{ y_t - y_t^* }{y_t}$
1	37	37,0	4,0			
2	41	41,0	4,0	41,0		
3	40	40,3	1,9	45,0	25,0	0,1
4	41	41,1	1,4	42,1	1,2	0,0
5	45	44,9	2,5	42,4	6,5	0,1
6	42	42,3	0,2	47,4	28,6	0,1
7	46	45,8	1,7	42,5	12,5	0,1
8	48	48,0	1,9	47,5	0,2	0,0
9	47	47,1	0,7	49,9	8,3	0,1
10	53	52,7	2,9	47,8	26,8	0,1
11	58	57,9	3,9	55,6	5,6	0,0
12	67	66,7	6,1	61,8	27,2	0,1
13	79	78,7	8,8	72,9	37,6	0,1
14	85	85,1	7,7	87,4	6,0	0,0
15	88	88,2	5,6	92,8	23,3	0,1
16				93,9		
suma					209,0	0,9

Dzieląc błąd średniokwadratowy przez wielkość prognozy otrzymamy średniokwadratowy błąd względny prognozy.
Dopuszczalność prognozy oceniamy uśredniając wartości obliczone w ostatniej kolumnie (otrzymamy średni błąd względny).

s*	Średniokw. bł. wzgl. prognozy
4,0	4,27%

średni błąd względny
6,6%

Szereg czasowy wyjściowy i wygładzony prezentujemy na wykresie.

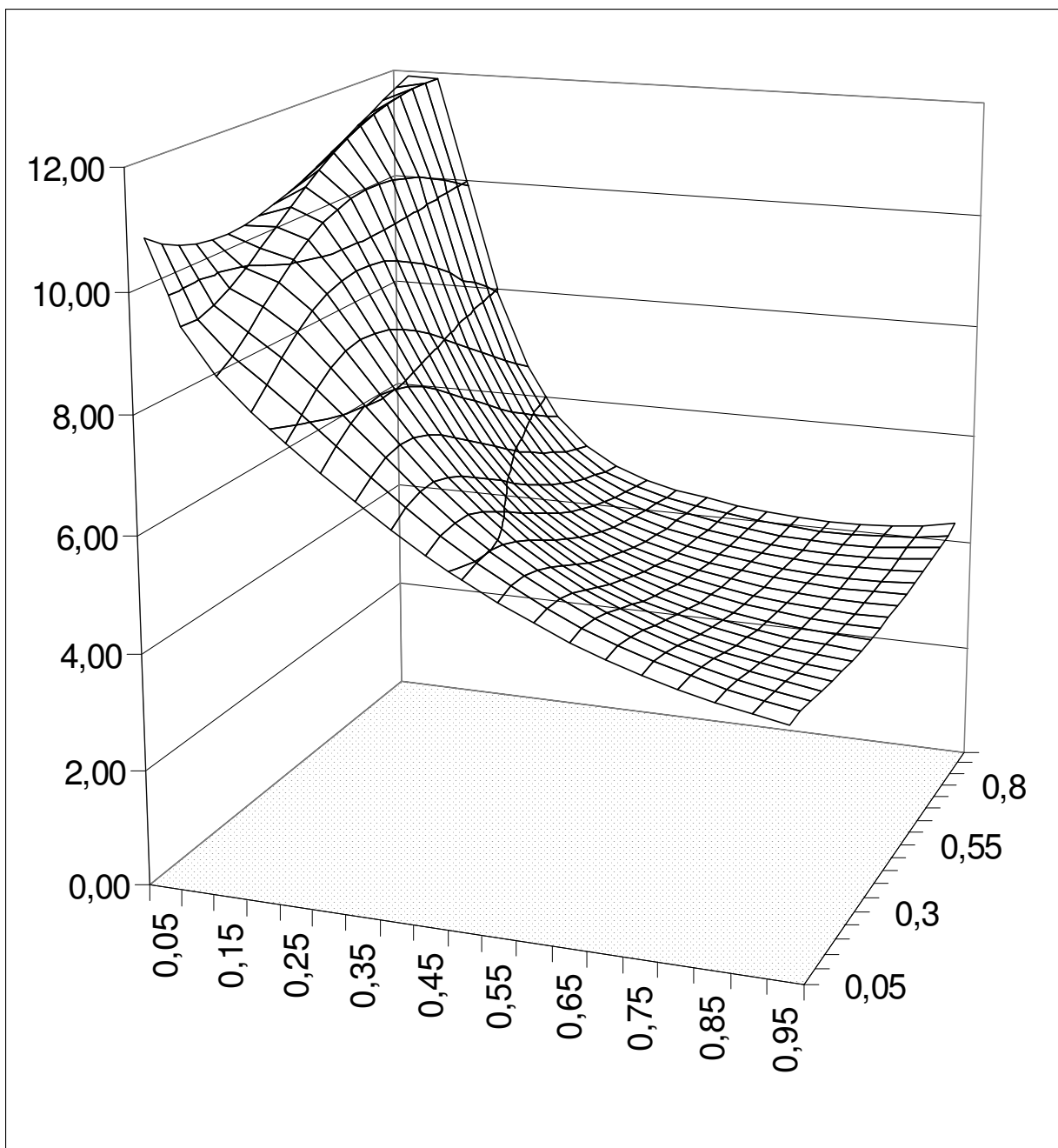


Aby porównać błędy dla różnych wartości α i β wykonajmy zestawienie błędów średniokwadratowych s^* dla wartości α i β ze skokiem 0,05.

beta alfa	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95
0,05	10,89	10,69	10,54	10,45	10,40	10,40	10,42	10,48	10,56	10,66	10,78	10,91	11,05	11,19	11,34	11,48	11,63	11,78	11,92
0,1	9,52	9,51	9,60	9,76	9,97	10,20	10,44	10,67	10,89	11,10	11,28	11,45	11,58	11,69	11,78	11,84	11,88	11,89	11,89
0,15	8,78	8,96	9,22	9,51	9,79	10,04	10,26	10,43	10,56	10,64	10,68	10,68	10,64	10,58	10,48	10,37	10,23	10,07	9,90
0,2	8,25	8,54	8,85	9,13	9,35	9,52	9,62	9,66	9,64	9,58	9,47	9,34	9,17	8,99	8,79	8,50	8,37	8,15	7,94
0,25	7,80	8,11	8,39	8,60	8,73	8,79	8,77	8,69	8,57	8,41	8,22	8,02	7,80	7,58	7,36	7,14	6,93	6,73	6,54
0,3	7,36	7,66	7,88	8,01	8,05	8,01	7,91	7,76	7,58	7,37	7,16	6,94	6,72	6,51	6,31	6,13	5,95	5,79	5,65
0,35	6,95	7,20	7,36	7,41	7,38	7,28	7,13	6,95	6,74	6,53	6,33	6,12	5,94	5,76	5,60	5,45	5,32	5,21	5,10
0,4	6,56	6,76	6,86	6,86	6,78	6,64	6,47	6,28	6,08	5,89	5,71	5,54	5,38	5,24	5,12	5,01	4,92	4,84	4,78
0,45	6,20	6,36	6,41	6,37	6,26	6,11	5,93	5,75	5,57	5,40	5,25	5,11	4,99	4,89	4,80	4,73	4,67	4,62	4,58
0,5	5,87	5,99	6,00	5,94	5,81	5,66	5,50	5,33	5,18	5,04	4,92	4,81	4,72	4,65	4,58	4,53	4,50	4,47	4,44
0,55	5,57	5,66	5,65	5,57	5,44	5,30	5,15	5,01	4,88	4,77	4,67	4,59	4,52	4,47	4,43	4,40	4,37	4,36	4,34
0,6	5,31	5,37	5,34	5,26	5,13	5,00	4,87	4,75	4,65	4,56	4,48	4,43	4,38	4,34	4,31	4,29	4,28	4,27	4,26
0,65	5,07	5,12	5,08	4,99	4,88	4,76	4,65	4,55	4,47	4,40	4,34	4,30	4,27	4,24	4,22	4,21	4,20	4,19	4,19
0,7	4,87	4,90	4,86	4,77	4,67	4,57	4,47	4,39	4,33	4,28	4,23	4,20	4,18	4,17	4,15	4,15	4,14	4,14	4,14
0,75	4,68	4,71	4,66	4,59	4,50	4,41	4,33	4,27	4,22	4,18	4,15	4,13	4,12	4,11	4,10	4,10	4,10	4,11	4,11
0,8	4,53	4,54	4,50	4,43	4,36	4,29	4,22	4,17	4,14	4,11	4,09	4,08	4,07	4,07	4,08	4,08	4,09	4,11	4,12
0,85	4,39	4,40	4,37	4,31	4,24	4,18	4,14	4,10	4,07	4,06	4,05	4,05	4,05	4,06	4,07	4,09	4,11	4,14	4,16
0,9	4,27	4,29	4,25	4,20	4,15	4,11	4,07	4,05	4,03	4,03	4,03	4,04	4,05	4,07	4,09	4,12	4,16	4,19	4,24
0,95	4,18	4,19	4,16	4,12	4,08	4,05	4,03	4,01	4,01	4,01	4,03	4,05	4,07	4,10	4,14	4,18	4,23	4,28	4,34

Jak widać najmniejszy błąd średniokwadratowych s^* otrzymujemy dla wartości $\alpha = 0,95$ i $\beta = 0,45$.

Wyniki te można zilustrować graficznie.



Wykres błędów średniokwadratowych s^* dla różnych wartości α i β .

Modele ze składową przypadkową, trendem i wahaniami sezonowymi.

Model Wintersa.

Stosujemy dwa modele:

- a) **model multiplikatywny**,
(stosujemy najczęściej gdy poziom wahań sezonowych wokół trendu rośnie (maleje), dokładniej gdy względny poziom wahań sezonowych jest w przybliżeniu stały)
- b) **model addytywny**,
(stosujemy najczęściej gdy poziom wahań sezonowych wokół słabego trendu lub stałego poziomu nie zmienia się, tzn. gdy bezwzględny poziom wahań sezonowych jest w przybliżeniu stały)

Model multiplikatywny.

Prognozę wyznaczamy w sposób sekwencyjny korzystając z trzech parametrów wygładzania

Prognozę zmiennej Y na okres T ($T > n$) $T = n + 1, n + 2$ itd.

Wyznaczamy na podstawie wzoru:

$$y_T^* = (F_n + (T - n)S_n)C_{T-r}$$

w szczególności prognozę bieżącą wyznaczamy następująco:

$$y_t^* = (F_{t-1} + S_{t-1})C_{t-r}$$

gdzie

r - liczba faz cyklu (długość cyklu sezonowego)

oraz

$$F_t = \alpha \frac{y_t}{C_{t-r}} + (1 - \alpha)(F_{t-1} + S_{t-1}) \quad (\text{służy do wygładzonej oceny}$$

wartości zjawiska)

$$S_t = \beta(F_t - F_{t-1}) + (1 - \beta)S_{t-1} \quad (\text{służy do wygładzonej oceny}$$

wartości przyrostu trendu)

$$C_t = \gamma \frac{y_t}{F_t} + (1 - \gamma) C_{t-r} \quad (\text{służy do wygładzonej oceny sezonowości})$$

$\alpha, \beta, \gamma \in \langle 0, 1 \rangle$ - parametry wygładzania.

Ich wartość dobieramy np. na podstawie kryterium najmniejszego błędu średniego prognoz wygaśniętych s^* tzn. $\min_{\alpha, \beta} s^*(\alpha, \beta, \gamma)$ gdzie

$$s^* = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - y_t^*(\alpha, \beta, \gamma))^2}.$$

Wartości początkowe $F_{r+1}, S_{r+1}, C_1, C_2, \dots, C_r$, wyznaczamy następująco

- dla F przyjmuje się **wartość z szeregu czasowego odpowiadającą pierwszej fazie drugiego cyklu tzn: $F_{r+1} = y_{r+1}$** lub wartość średnią z pierwszego cyklu.
- Dla S przyjmuje się **różnicę średnich wartości z drugiego i pierwszego cyklu** lub zero.
- Dla C (w poszczególnych fazach I cyklu) **przyjmuje się ilorazy wartości zmiennej z I cyklu w odniesieniu do średniej wartości w I cyklu,**

$$C_1 = \frac{y_1}{(y_1 + y_2 + \dots + y_r)}; \dots; C_r = \frac{y_r}{(y_1 + y_2 + \dots + y_r)}$$

lub przyjąć 1.

Uwaga.

$$C_1 + C_2 + \dots + C_r = r$$

Model addytywny.

Prognozę wyznaczamy w sposób sekwencyjny korzystając z trzech parametrów wygładzania

Prognozę zmiennej Y na okres T ($T > n$) $T = n + 1, n + 2$ itd.

Wyznaczamy na podstawie wzoru:

$$y_T^* = F_n + (T - n)S_n + C_{T-r}$$

gdzie

r - liczba faz cyklu (długość cyklu sezonowego)

oraz

$$F_t = \alpha(y_t - C_{t-r}) + (1 - \alpha)(F_{t-1} + S_{t-1}) \quad (\text{służy do wygładzonej oceny wartości średniej})$$

$$S_t = \beta(F_t - F_{t-1}) + (1 - \beta)S_{t-1} \quad (\text{służy do wygładzonej oceny wartości przyrostu trendu})$$

$$C_t = \gamma(y_t - F_t) + (1 - \gamma)C_{t-r} \quad (\text{służy do wygładzonej oceny sezonowości})$$

$\alpha, \beta, \gamma \in \langle 0, 1 \rangle$ - parametry wygładzania. Dobór parametrów jak dla modelu multiplikatywnego.

Wartości początkowe F_{r+1}, S_{r+1} , wyznaczamy jak dla modelu multiplikatywnego. Natomiast

$$C_1 = y_1 - \frac{(y_1 + y_2 + \dots + y_r)}{r}; \dots; C_r = y_r - \frac{(y_1 + y_2 + \dots + y_r)}{r}$$

Uwaga.

$$C_1 + C_2 + \dots + C_r = 0$$