

## Szereg czasowy z trendem. Model Holta.

Stosujemy dwa równania rekurencyjne:

I - służy do wyznaczania wygładzonych wartości szeregu czasowego w chwili  $t$

$$F_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)(F_{t-1} + S_{t-1})$$

II - służy do wyznaczania wygładzonych wartości przyrostu trendu w chwili  $t$

$$S_t = \beta(F_t - F_{t-1}) + (1 - \beta)S_{t-1}$$

$\alpha, \beta \in \langle 0, 1 \rangle$  - parametry wygładzania.

Ich wartość dobieramy np. na podstawie kryterium najmniejszego błędu średniego prognoz wygaśniętych  $s^*$  tzn.  $\min_{\alpha, \beta} s^*(\alpha, \beta)$  gdzie

$$s^* = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - y_t^*(\alpha, \beta))^2}$$

Prognozy wygaśnięte obliczamy wg wzoru

$$y_{t+1}^* = F_t + S_t$$

Prognozę zmiennej  $Y$  na okres  $T$  ( $T > n$ )  $T = n + 1, n + 2$  itd.

$$y_T^* = F_n + (T - n)S_n$$

w szczególności dla  $T = n + 1$  mamy:

$$y_{n+1}^* = F_n + S_n$$

(wszystkie kolejne prognozy leżą na prostej  $y = F_n + x \cdot S_n$ )

### Uwaga.

Ponieważ  $y_t^* = F_{t-1} + S_{t-1}$  to

$$F_t = y_t^* + \alpha(y_t - y_t^*)$$

$$S_t = S_{t-1} + \alpha\beta(y_t - y_t^*)$$

Wartości początkowe  $F_1$  i  $S_1$  wyznaczamy wg propozycji

| Propozycja | $F_1$                                                                                       | $S_1$                                                                                                   |
|------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1          | $y_1$                                                                                       | 0                                                                                                       |
| <b>2</b>   | <b><math>y_1</math></b>                                                                     | <b><math>y_2 - y_1</math></b>                                                                           |
| 3          | Wyraz wolny liniowej funkcji trendu oszacowany na podstawie np. kilku pierwszych obserwacji | Współczynnik kierunkowy liniowej funkcji trendu oszacowany na podstawie np. kilku pierwszych obserwacji |

**Przykład:**

Wartość usług firmy „X” w kolejnych kwartałach 2001 ÷ 2003 i trzech pierwszych kwartałach 2004:

**37, 41, 40, 41, 45, 42, 46, 48, 47, 53, 58, 67, 79, 85, 88 (tys. zł)**

a) wyznaczyć prognozy na IV kwartał 2000

b) ocenić jakość prognozy.

Przyjmujemy  $F_1 = y_1 = 37$

Przyjmujemy  $S_1 = y_2 - y_1 = 41 - 37 = 4$

Model Holta zastosujemy dla  $\alpha = 0,95$  i  $\beta = 0,45$

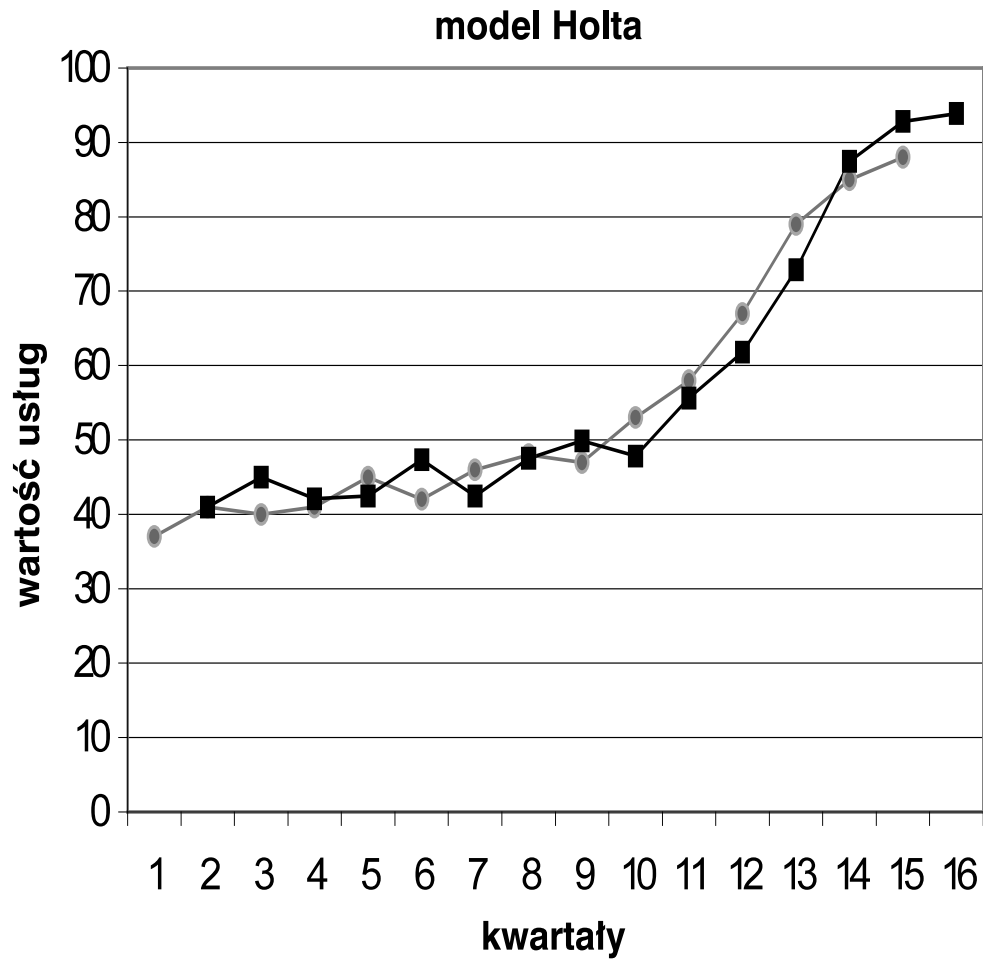
| kwartał | $y_t$ | $F_t$ | $S_t$ | $y_t^* = F_{t-1} + S_{t-1}$ | $(y_t - y_t^*)^2$ | $\frac{ y_t - y_t^* }{y_t}$ |
|---------|-------|-------|-------|-----------------------------|-------------------|-----------------------------|
| 1       | 37    | 37,0  | 4,0   |                             |                   |                             |
| 2       | 41    | 41,0  | 4,0   | 41,0                        |                   |                             |
| 3       | 40    | 40,3  | 1,9   | 45,0                        | 25,0              | 0,1                         |
| 4       | 41    | 41,1  | 1,4   | 42,1                        | 1,2               | 0,0                         |
| 5       | 45    | 44,9  | 2,5   | 42,4                        | 6,5               | 0,1                         |
| 6       | 42    | 42,3  | 0,2   | 47,4                        | 28,6              | 0,1                         |
| 7       | 46    | 45,8  | 1,7   | 42,5                        | 12,5              | 0,1                         |
| 8       | 48    | 48,0  | 1,9   | 47,5                        | 0,2               | 0,0                         |
| 9       | 47    | 47,1  | 0,7   | 49,9                        | 8,3               | 0,1                         |
| 10      | 53    | 52,7  | 2,9   | 47,8                        | 26,8              | 0,1                         |
| 11      | 58    | 57,9  | 3,9   | 55,6                        | 5,6               | 0,0                         |
| 12      | 67    | 66,7  | 6,1   | 61,8                        | 27,2              | 0,1                         |
| 13      | 79    | 78,7  | 8,8   | 72,9                        | 37,6              | 0,1                         |
| 14      | 85    | 85,1  | 7,7   | 87,4                        | 6,0               | 0,0                         |
| 15      | 88    | 88,2  | 5,6   | 92,8                        | 23,3              | 0,1                         |
| 16      |       |       |       | 93,9                        |                   |                             |
| suma    |       |       |       |                             | 209,0             | 0,9                         |

Dzieląc błąd średniokwadratowy przez wielkość prognozy otrzymamy średniokwadratowy błąd względny prognozy.  
Dopuszczalność prognozy oceniamy uśredniając wartości obliczone w ostatniej kolumnie (otrzymamy średni błąd względny).

| s*  | Średniokw. bł. wzgl. prognozy |
|-----|-------------------------------|
| 4,0 | 4,27%                         |

|                              |
|------------------------------|
| średni błąd względny<br>6,6% |
|------------------------------|

Szereg czasowy wyjściowy i wygładzony prezentujemy na wykresie.

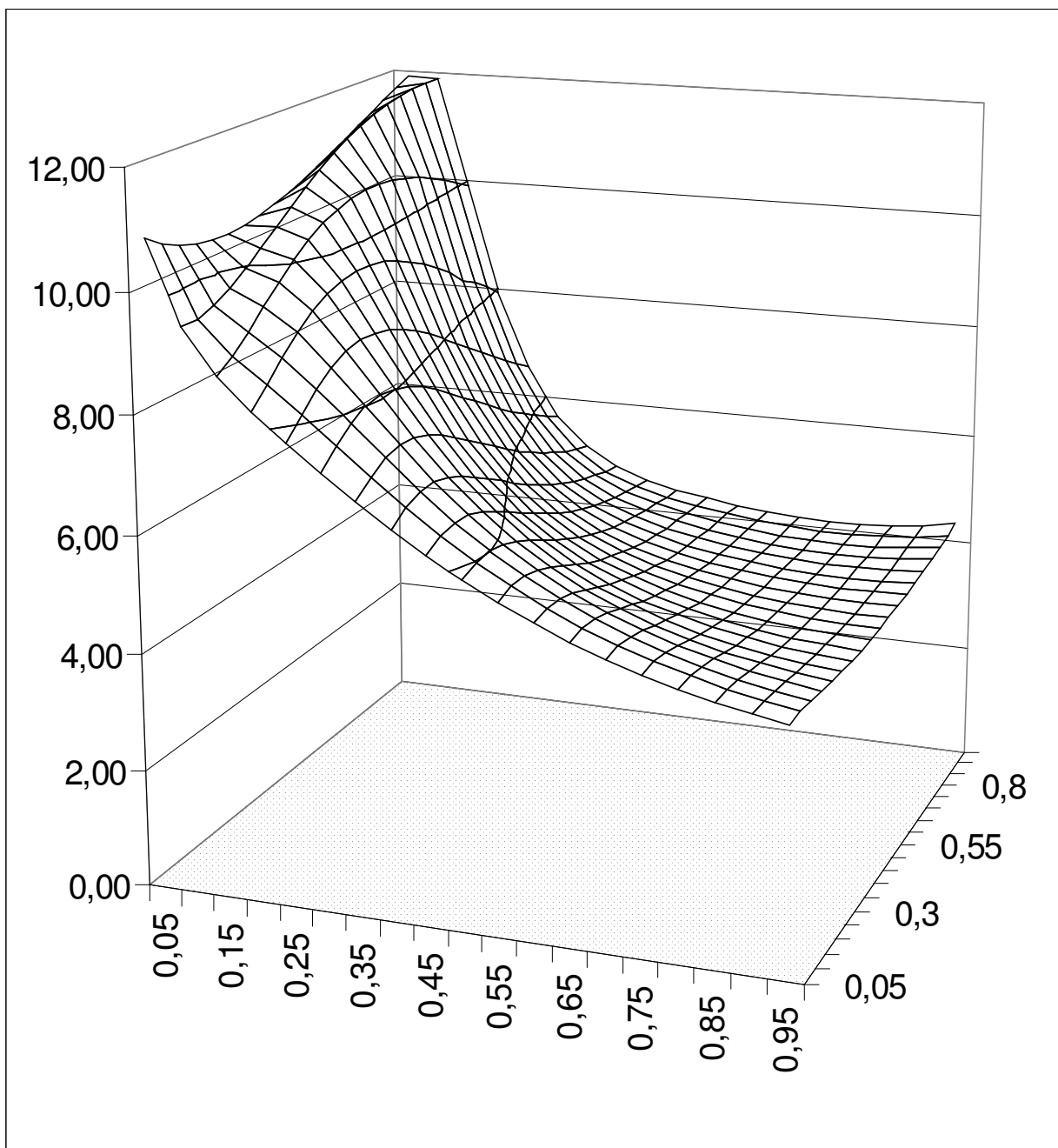


Aby porównać błędy dla różnych wartości  $\alpha$  i  $\beta$  wykonajmy zestawienie błędów średniokwadratowych  $s^*$  dla wartości  $\alpha$  i  $\beta$  ze skokiem 0,05.

| beta<br>alfa | 0,05  | 0,1   | 0,15  | 0,2   | 0,25  | 0,3   | 0,35  | 0,4   | 0,45  | 0,5   | 0,55  | 0,6   | 0,65  | 0,7   | 0,75  | 0,8   | 0,85  | 0,9   | 0,95  |
|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0,05         | 10,89 | 10,69 | 10,54 | 10,45 | 10,40 | 10,40 | 10,42 | 10,48 | 10,56 | 10,66 | 10,78 | 10,91 | 11,05 | 11,19 | 11,34 | 11,48 | 11,63 | 11,78 | 11,92 |
| 0,1          | 9,52  | 9,51  | 9,60  | 9,76  | 9,97  | 10,20 | 10,44 | 10,67 | 10,89 | 11,10 | 11,28 | 11,45 | 11,58 | 11,69 | 11,78 | 11,84 | 11,88 | 11,89 | 11,89 |
| 0,15         | 8,78  | 8,96  | 9,22  | 9,51  | 9,79  | 10,04 | 10,26 | 10,43 | 10,56 | 10,64 | 10,68 | 10,68 | 10,64 | 10,58 | 10,48 | 10,37 | 10,23 | 10,07 | 9,90  |
| 0,2          | 8,25  | 8,54  | 8,85  | 9,13  | 9,35  | 9,52  | 9,62  | 9,66  | 9,64  | 9,58  | 9,47  | 9,34  | 9,17  | 8,99  | 8,79  | 8,50  | 8,37  | 8,15  | 7,94  |
| 0,25         | 7,80  | 8,11  | 8,39  | 8,60  | 8,73  | 8,79  | 8,77  | 8,69  | 8,57  | 8,41  | 8,22  | 8,02  | 7,80  | 7,58  | 7,36  | 7,14  | 6,93  | 6,73  | 6,54  |
| 0,3          | 7,36  | 7,66  | 7,88  | 8,01  | 8,05  | 8,01  | 7,91  | 7,76  | 7,58  | 7,37  | 7,16  | 6,94  | 6,72  | 6,51  | 6,31  | 6,13  | 5,95  | 5,79  | 5,65  |
| 0,35         | 6,95  | 7,20  | 7,36  | 7,41  | 7,38  | 7,28  | 7,13  | 6,95  | 6,74  | 6,53  | 6,33  | 6,12  | 5,94  | 5,76  | 5,60  | 5,45  | 5,32  | 5,21  | 5,10  |
| 0,4          | 6,56  | 6,76  | 6,86  | 6,86  | 6,78  | 6,64  | 6,47  | 6,28  | 6,08  | 5,89  | 5,71  | 5,54  | 5,38  | 5,24  | 5,12  | 5,01  | 4,92  | 4,84  | 4,78  |
| 0,45         | 6,20  | 6,36  | 6,41  | 6,37  | 6,26  | 6,11  | 5,93  | 5,75  | 5,57  | 5,40  | 5,25  | 5,11  | 4,99  | 4,89  | 4,80  | 4,73  | 4,67  | 4,62  | 4,58  |
| 0,5          | 5,87  | 5,99  | 6,00  | 5,94  | 5,81  | 5,66  | 5,50  | 5,33  | 5,18  | 5,04  | 4,92  | 4,81  | 4,72  | 4,65  | 4,58  | 4,53  | 4,50  | 4,47  | 4,44  |
| 0,55         | 5,57  | 5,66  | 5,65  | 5,57  | 5,44  | 5,30  | 5,15  | 5,01  | 4,88  | 4,77  | 4,67  | 4,59  | 4,52  | 4,47  | 4,43  | 4,40  | 4,37  | 4,36  | 4,34  |
| 0,6          | 5,31  | 5,37  | 5,34  | 5,26  | 5,13  | 5,00  | 4,87  | 4,75  | 4,65  | 4,56  | 4,48  | 4,43  | 4,38  | 4,34  | 4,31  | 4,29  | 4,28  | 4,27  | 4,26  |
| 0,65         | 5,07  | 5,12  | 5,08  | 4,99  | 4,88  | 4,76  | 4,65  | 4,55  | 4,47  | 4,40  | 4,34  | 4,30  | 4,27  | 4,24  | 4,22  | 4,21  | 4,20  | 4,19  | 4,19  |
| 0,7          | 4,87  | 4,90  | 4,86  | 4,77  | 4,67  | 4,57  | 4,47  | 4,39  | 4,33  | 4,28  | 4,23  | 4,20  | 4,18  | 4,17  | 4,15  | 4,15  | 4,14  | 4,14  | 4,14  |
| 0,75         | 4,68  | 4,71  | 4,66  | 4,59  | 4,50  | 4,41  | 4,33  | 4,27  | 4,22  | 4,18  | 4,15  | 4,13  | 4,12  | 4,11  | 4,10  | 4,10  | 4,10  | 4,11  | 4,11  |
| 0,8          | 4,53  | 4,54  | 4,50  | 4,43  | 4,36  | 4,29  | 4,22  | 4,17  | 4,14  | 4,11  | 4,09  | 4,08  | 4,07  | 4,07  | 4,08  | 4,08  | 4,09  | 4,11  | 4,12  |
| 0,85         | 4,39  | 4,40  | 4,37  | 4,31  | 4,24  | 4,18  | 4,14  | 4,10  | 4,07  | 4,06  | 4,05  | 4,05  | 4,05  | 4,06  | 4,07  | 4,09  | 4,11  | 4,14  | 4,16  |
| 0,9          | 4,27  | 4,29  | 4,25  | 4,20  | 4,15  | 4,11  | 4,07  | 4,05  | 4,03  | 4,03  | 4,03  | 4,04  | 4,05  | 4,07  | 4,09  | 4,12  | 4,16  | 4,19  | 4,24  |
| 0,95         | 4,18  | 4,19  | 4,16  | 4,12  | 4,08  | 4,05  | 4,03  | 4,01  | 4,01  | 4,01  | 4,03  | 4,05  | 4,07  | 4,10  | 4,14  | 4,18  | 4,23  | 4,28  | 4,34  |

Jak widać najmniejszy błąd średniokwadratowych  $s^*$  otrzymujemy dla wartości  $\alpha = 0,95$  i  $\beta = 0,45$ .

Wyniki te można zilustrować graficznie.



Wykres błędów średniokwadratowych  $s^*$  dla różnych wartości  $\alpha$  i  $\beta$ .

*L. Kowalski, 10.03.2005*